Condizionamento di un problema

In generale, un problema matematico è definito dai dati di ingresso *x* e dal risultato *y*. L'algoritmo *f* utilizzato per risolvere il problema, fa da ponte fra *x* e *y*,

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y$$

Quindi, è l'algoritmo a determinare la transizione da *x* a *y*. Matematicamente, lo posiamo denotare come $y = f(x)$.

Per misurare la bontà della risposta *y*, è necessario determinare la sensibilità di *y* ad una perturbazione δx sui dati di ingresso *x*.

Se denotiamo i nuovi dati in ingresso come $\bar{x} = x + \delta x$, una misura della variazione della risposta (in relazione alla risposta per i dati non perturbati), è data dal errore relativo

$$\frac{\| f(\bar{x}) - f(x) \|}{\| f(x) \|}, \quad f(x) \neq 0$$

quale funzione delle perturbazioni relative $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ $(x \neq 0)$,

$$\frac{\| f(\bar{x}) - f(x) \|}{\| f(x) \|} \leq K \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}.$$

Questa relazione esprime il *condizionamento del problema*, e *K il numero di condizionamento*.

Se *K* è minore di uno, il problema si dice *ben condizionato*, cioè quando a piccole perturbazioni nei dati di ingresso corrispondono piccole perturbazioni nella risposta del algoritmo.

Esempio: somma di due numeri
Se l'algoritmo *f* ammette uno sviluppo in serie di Taylor in torno al punto *x*, potremmo scrivere

$$f(\bar{x}) = f(x + \delta x) \cong f(x) + \delta x \; f'(x) + O(\delta x^2)$$

e quindi,

$$\frac{\| f(\bar{x}) - f(x) \|}{\| f(x) \|} \leq \frac{\| \delta x \; f'(x) \|}{\| f(x) \|} \leq K \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$