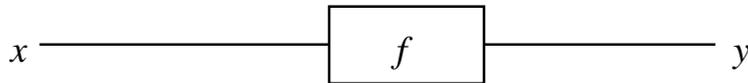


Condizionamento di un problema

In generale, un problema matematico è definito dai dati di ingresso x e dal risultato y . L'algoritmo f utilizzato per risolvere il problema, fa da ponte fra x e y ,



Quindi, è l'algoritmo a determinare la transizione da x a y . Matematicamente, lo possiamo denotare come $y = f(x)$.

Per misurare la bontà della risposta y , è necessario determinare la sensibilità di y ad una perturbazione δx sui dati di ingresso x .

Se denotiamo i nuovi dati in ingresso come $\bar{x} = x + \delta x$, una misura della variazione della risposta (in relazione alla risposta per i dati non perturbati), è data dal errore relativo

$$\frac{\|f(\bar{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|}, \quad f(x) \neq 0$$

quale funzione delle perturbazioni relative $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ ($x \neq 0$),

$$\frac{\|f(\bar{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq K \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}.$$

Questa relazione esprime il *condizionamento del problema*, e K il *numero di condizionamento*.

Se K è minore di uno, il problema si dice *ben condizionato*, cioè quando a piccole perturbazioni nei dati di ingresso corrispondono piccole perturbazioni nella risposta del algoritmo.

Esempio: somma di due numeri

Se l'algoritmo f ammette uno sviluppo in serie di Taylor in torno al punto x , potremmo scrivere

$$f(\bar{x}) = f(x + \delta x) \cong f(x) + \delta x f'(x) + O(\delta x^2)$$

e quindi,

$$\frac{\|f(\bar{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \frac{\|\delta x f'(x)\|}{\|f(x)\|} \leq K \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$